1 Rappels mathématiques

Une **fonction** mathématique est un objet mathématique, qui transforme d'autres objets mathématiques. En particulier, les fonctions étudiées au lycée sont des fonctions dites **scalaires**, qui transforment des nombres en nombres. Le terme de **scalaire** est un terme couramment utilisé pour désigner un nombre en opposition à la notion de vecteur. La notation standard pour une fonction scalaire f est la suivante

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \tag{1}$$

Ici il faut faire attention à plusieurs éléments. Premièrement, $f(x)$ est un nombre (en particulier un nombre réel). Deuxièmement la fonction est $x \mapsto f(x)$ qui se lie "la fonction qui à x associe $f(x)$". Cependant toutes les fonctions scalaires ne travaillent pas systématiquement sur les nombres réels. c'est donc l'occasion de faire un rappel succinct sur les ensembles de nombres :

- $\mathbb{N}$ les entiers naturels (les nombres entiers positifs) $\{0, 1, ...\}$
- $\mathbb{Z}$ les entiers relatifs (les nombres entiers) $\{..., -1, 0, 1, ...\}$
- $\mathbb{Q}$ les rationnels $\{a/b | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$
- $\mathbb{R}$ les réels qui peuvent être définit comme la complétion de $\mathbb{Q}$ ou plus simplement dit : "il y a des trous dans $\mathbb{Q}$ (il manque $\sqrt{2}, \pi, ...$) que l'on comble.
- $\mathbb{C}$ les complexes qui sont les nombres $a + ib$ ou encore $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$, où $\times$ désigne le produit cartésien (c'est un plan en deux dimensions).

De manière générale, A^* est l'ensemble A privé de 0 et A_+ est l'ensemble A limité aux positifs. Par exemple $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

1.1 Les fonctions particulières

En cours, nous avons vu des propriétés particulières que peuvent satisfaire les fonctions. En effet, celles-ci peuvent être

- **linéaire** : donc de la forme $x \mapsto ax$, par exemple $x \mapsto 2x$
- **affine** : donc de la forme $x \mapsto ax + b$, par exemple $x \mapsto x + 1$
- **monomiale** : donc de la forme $x \mapsto c \times x^a$, par exemple $x \mapsto x^2$
- **polynomiale** : donc de la forme $x \mapsto \sum_{k=0} a_k x^k$, par exemple $x \mapsto x^2 - x^3$
- **croissante** : donc satisfaisant $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, par exemple $x \mapsto \sqrt{x}$
- **décroissante** : donc satisfaisant $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, par exemple $x \mapsto -x$
- **convexe** : donc satisfaisant $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0; 1] \Rightarrow tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y)$, par exemple $x \mapsto x^2$
- **concave** : donc satisfaisant $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0; 1] \Rightarrow tf(x) + (1-t)f(y) \leq f(tx + (1-t)y)$, par exemple $x \mapsto -x^2$
- **paire** : donc satisfaisant $\forall x \in \mathbb{R}, \Rightarrow f(x) = f(-x)$, par exemple $x \mapsto \cos(x)$
- **impaire** : donc satisfaisant $\forall x \in \mathbb{R}, \Rightarrow f(x) = -f(-x)$, par exemple $x \mapsto \sin(x)$
- **continue** : donc satisfaisant $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in]x - \delta; x + \delta[\Rightarrow f(y) \in]f(x) - \epsilon; f(x) + \epsilon[$, par exemple $x \mapsto \tan(x)$ sur $] - \pi/2; \pi/2[$. Cette définition se lit comme suit : si je veux faire un saut plus grand que ϵ (aussi petit qu'il soit) je dois me déplacer sur l'axe des abscisse d'au moins $\delta > 0$.
- **dérivable** : donc satisfaisant $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = l$ est bien définie, par exemple $x \mapsto e^x$ est dérivable partout.

Rappelons un lien très important entre deux propriétés : toute fonction dérivable est continue ! L'inverse est faux avec le contre-exemple suivant :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \end{cases} \end{array} \tag{2}$$

Cette fonction admet pour dérivée

$$\begin{array}{rccc} f': & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \end{cases} \end{array} \tag{3}$$

Cette dérivée n'est pas continue en 0... Heureusement pour nous, de tels exemples ne nous concerneront pas souvent.

1.2 Dérivabilité

Soit f une fonction scalaire dérivable sur et g une autre fonction scalaire dérivable, alors

$$(f \circ g)' = f' \circ g \times g' \tag{4}$$

Démonstration. Pour démontrer cette formule nous allons utiliser une astuce standard en maths... Nous allons multiplier par 1.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)} \tag{5}$$

On utilise la commutativité de la multiplication ($a \times b = b \times a$).

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \tag{6}$$

On a retrouvé la dérivée de g en x avec $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Il faut maintenant expliciter la formule $\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}$. Pour cela, on observe que g est continue en x et donc quand $h \to 0$, on sait que $g(x+h) - g(x) = H \to 0$. Donc en posant $X = g(x)$ et $H = g(x+h) - g(x)$ on trouve

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h,H \to 0} \frac{f(X+H) - f(X)}{H} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \tag{7}$$

en donc

$$(f \circ g)' = f' \circ g \times g' \tag{8}$$

$\square$

La deuxième propriété est la dérivée d'un produit de fonctions scalaires :

$$(f \times g)' = f' \times g + g' \times f \tag{9}$$

Démonstration. Dans cette démonstration nous allons utiliser une autre astuce classique en mathématiques, l'addition par 0. Ici 0 sera $-f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x))}{h} \tag{10}$$

On peut alors factoriser comme suit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x))}{h} = \lim_{h \to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h) - g(x))}{h} \tag{11}$$

En passant à la limite on retrouve bien

$$(f \times g)' = f' \times g + g' \times f \tag{12}$$

$\square$

Enfin la dernière propriété que l'on verra dans ces rappels est la dérivée d'un quotient de fonctions

$$\frac{f}{g}' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \tag{13}$$

Démonstration. Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser les deux résultats précédents. On commence par réécrire le problème de telle sorte à voir un produit de fonctions

$$\frac{f}{g}' = \left(f \times \frac{1}{g}\right)' \tag{14}$$

En utilisant l'équation 9, on obtient

$$\frac{f}{g}' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' \tag{15}$$

On utilise alors la dérivée d'une composée (équation 4) de fonction sur $\left(\frac{1}{v}\right)'$ pour obtenir

$$\frac{f}{g}' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{-g'}{g^2}\right)' \tag{16}$$

puis on passe tout au même dénominateur, ce qui donne bien

$$\frac{f}{g}' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \tag{17}$$

$\square$