1 Dérivées Partielles

1.1 Mise en Confiance

1. Rappeler la formule de la dérivée de f en x pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Rappeler la formule de la dérivée d'une composée de fonctions $f(g)$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x)}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(g(x))g'(x)$$

3. Donner la dérivée des fonctions suivantes

1. $x \mapsto x^2$
2. $x \mapsto \frac{1}{x}$
3. $x \mapsto \sqrt{x}$
4. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
5. $x \mapsto x^n$
6. $x \mapsto |x|$
7. $x \mapsto x^{0.1686499}$

Les dérivées sont :

1. $x \mapsto 2x$
2. $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$
3. $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $x \mapsto \frac{-1}{2x^{3/2}}$
5. $x \mapsto nx^{n-1}$
6. $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
7. $x \mapsto (0.1686499 - 1)x^{0.1686499-1}$

4. Soit une fonction $f : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$. Combien de dérivée partielles admet f ?
La fonction f admet b coordonnées dans l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^b$. Donc $f(x) = (f_1(x), ..., f_b(x))$ et chacune de ses fonctions $f_1, ..., f_b$ admet a coordonnées pour x et donc a dérivées partielles. En conclusion f admet $a \times b$ dérivées partielles.
5. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. Quelles sont les dérivées partielles de $f + g$.

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

6. Soient $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ sa dérivée partielle en x_1. Quelle est la dérivée partielle en x_1 de πf ($\pi \approx 3.14$ est un nombre) ?

$$\frac{\partial(\pi f)}{\partial x_1} = \pi \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

7. Si f est une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ et son gradient $\nabla f : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$, que valent a et b ?
Le gradient est le vecteur composé de chaque dérivées partielles et donc

$$\nabla f : (x_1, ..., x_m) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

En conséquence, cette fonction admet m coordonnées en entrée ($x = (x_1, ..., x_m)$) et m coordonnées en sortie (les m dérivées partielles). Ainsi $a = b = m$.
8. Rappeler la formule du Laplacien de f pour $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}$$

9. Rappeler la définition d'un point critique.
x est un point critique si et seulement si pour tout i on a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$
10. Donner un exemple de fonction et de point critique de cette fonction qui n'est pas un extremum local.
La fonction $x \mapsto x^3$ admet un point critique en $x = 0$ qui n'est ni un minimum ni un maximum local.

1.2 Exercices Calculatoires

1. Soit $(x, y) \mapsto x^2 \cos(yx)$ est une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Que valent m et n. Calculer ses dérivées partielles et son Laplacien.
La fonction prend deux nombres x et y et les transforme en un nombre $x^2 \cos(xy)$. Donc $m = 2$ et $n = 1$. Enfin

$$\begin{cases} \frac{\partial(x^2\cos(xy))}{\partial x} = x(2\cos(xy) - xy\sin(xy)) \\ \frac{\partial(x^2\cos(xy))}{\partial y} = -x^3\sin(xy) \\ \Delta(x^2\cos(xy)) = -(-2 + x^4 + x^2y^2)\cos(xy) - 4xy\sin(xy) \end{cases}$$

2. Soit $(r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ (cette fonction est le changement de variable en coordonnées polaires)est une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Que valent m et n. Calculer ses dérivées partielles et son Laplacien.
La fonction prend deux nombres r et θ et leur associe deux nombres $r\cos(\theta)$ et $r\sin(\theta)$. On a donc $m = n = 2$.

$$\begin{cases} \frac{\partial r\cos(\theta)}{\partial r} = \cos(\theta) \\ \frac{\partial r\sin(\theta)}{\partial r} = \sin(\theta) \\ \frac{\partial r\cos(\theta)}{\partial \theta} = -r\sin(\theta) \\ \frac{\partial r\sin(\theta)}{\partial \theta} = r\cos(\theta) \end{cases}$$

Ici $n = 2$ et nous n'avons pas définit le Laplacien dans ce cas.
3. Soit $x \mapsto (x, x, x^2, yx, rx)$. Calculer ses dérivées partielles.

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial yx}{\partial x} = y \\ \frac{\partial rx}{\partial x} = r \end{cases}$$

4. Soit $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1x_2e^{x_3}$. Calculer la norme euclidienne de son gradient.
On commence par calculer le gradient

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2e^{x_3} \\ x_1e^{x_3} \\ x_1x_2e^{x_3} \end{pmatrix}$$

La norme euclidienne du gradient est

$$\|\nabla f(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{(x_2e^{x_3})^2 + (x_1e^{x_3})^2 + (x_1x_2e^{x_3})^2} = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2)e^{2x_3}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2}e^{x_3}$$

5. Soit $(x_1, x_2) \mapsto x_1\ln(x_2)$. Calculer la norme infinie de son gradient.
On commence par calculer le gradient

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(x_2) \\ \frac{x_1}{x_2} \end{pmatrix}$$

Pour rappel la norme infinie est le maximum de la valeur absolue par coordonnées, autrement dit

$$\|\nabla f\|_\infty = \max\left\{|\ln(x_2)|, |\frac{x_1}{x_2}|\right\}$$

Donc, lorsque $|\frac{x_1}{x_2}| > |\ln(x_2)|$ on aura $\|\nabla f\|_\infty = |\frac{x_1}{x_2}|$ et sinon $\|\nabla f\|_\infty = |\ln(x_2)|$.

6. Soit $g : (x,y) \mapsto y^3x - 3y\sin(x)$ et $f : x \mapsto 2x - 10$. Calculer le Laplacien de $f(g)$.

$$\Delta(f \circ g)(x,y) = \Delta(2(y^3x - 3y\sin(x)) - 10)$$

Calculons les dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial 2(y^3x-3y\sin(x))-10}{\partial x} = 2y^3 - 6y\cos(x) \\ \frac{\partial 2(y^3x-3y\sin(x))-10}{\partial y} = 6y^2x - 6\sin(x) \\ \frac{\partial^2 2(y^3x-3y\sin(x))-10}{\partial x^2} = 6y\sin(x) \\ \frac{\partial^2 2(y^3x-3y\sin(x))-10}{\partial y^2} = 12yx \end{cases}$$

On en déduit

$$\Delta(f \circ g)(x,y) = 6y(2x + \sin(x))$$

7. Soit $(x,y,z) \mapsto \sin xy + \cos yz + x^2 + y^2 + z^2$. Trouver les points critiques et les extrema locaux de cette fonction.

Pour trouver les points critiques, on calcule les dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy) + 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy) - z\sin(yz) + 2y \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -y\sin(yz) + 2z \end{cases}$$

On cherche les valeurs de (x,y,z) telles que

$$\begin{cases} 0 = y\cos(xy) + 2x \\ 0 = x\cos(xy) - z\sin(yz) + 2y \\ 0 = -y\sin(yz) + 2z \end{cases}$$

Supposons $y \neq 0$. Comme $0 = -y\sin(yz) + 2z$, on en déduit que $\sin(yz) = \frac{2z}{y}$.

$$\begin{cases} 0 = y\cos(xy) + 2x \\ 0 = x\cos(xy) - z\sin(yz) + 2y = x\cos(xy) - z\frac{2z}{y} + 2y \\ \sin(yz) = \frac{2z}{y} \end{cases}$$

On a également $0 = y\cos(xy) + 2x$ et donc $\cos(xy) = \frac{-2x}{y}$.

$$\begin{cases} \cos(xy) = \frac{-2x}{y} \\ 0 = x\cos(xy) - z\frac{2z}{y} + 2y = x\frac{-2x}{y} - z\frac{2z}{y} + 2y \\ \sin(yz) = \frac{2z}{y} \end{cases}$$

On a donc $x\frac{-2x}{y} - z\frac{2z}{y} + 2y = 0$ ce qui devient

$$\frac{2y^2 - 2x^2 - 2z^2}{y} = 0$$

On en déduit que si $y \neq 0$, les solutions vérifient : $x^2 + z^2 = y^2$. Attention, nous avons fait l'hypothèse $y \neq 0$, on a donc trouver "Si l'hypothèse $y \neq 0$ est correcte, alors tout les points (x,y,z) vérifiant $x^2 + z^2 = y^2$ sont des points critiques"... On va donc vérifier que notre hypothèse est correcte en essayant quelques points. Par exemple $(1,0,1)$ vérifie $x^2 + z^2 = y^2$ et donc devrait être un point critique.

$$\begin{cases} y\cos(xy) + 2x = 1\cos(1 \times 1) + 2 \times 1 = cos(1) + 2 \neq 0 \\ x\cos(xy) - z\sin(yz) + 2y = 1\cos(1 \times 1) - 0\sin(1 \times 1) + 2 \times 1 = cos(1) + 2 \neq 0 \\ -y\sin(yz) + 2z = -1\sin(1 \times 0) + 2 \times 0 = 0 \end{cases}$$

Donc $(1,0,1)$ n'est pas un point critique ! On en déduit que l'hypothèse $y = 0$ est fausse... Donc on sait que si on a des points critiques alors nécessairement $y = 0$. On réécrit alors les dérivées partielles pour $y = 0$

$$\begin{cases} 0 = 0\cos(x0) + 2x \\ 0 = 0\cos(x0) - z\sin(0z) + 20 \\ 0 = -0\sin(0z) + 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 2x \\ 0 = 0 \\ 0 = 2z \end{cases}$$

On en déduit que $x = y = z = 0$ est le seul point critique de la fonction ! C'est donc le seul candidat pour être un minimum ou maximum local. Il s'agit effectivement d'un minimum... On a des théorèmes pour résoudre ça : ici l'argument sera que la fonction est coercive ($\lim_{\|(x,y,z)\|\to\infty} f(x, y,) = \infty$ ça signifie que le graphe de la fonction est sorte de bol) et elle a un unique point critique, c'est donc un minimum.

8. Soit $f : (x, y) \mapsto ax + by$ et $\sigma : x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ (c'est la fonction "sigmoid"). Calculer la norme euclidienne du gradient de $\sigma(f)$.

La fonction $\sigma(f)$ est :

$$\sigma(f(x, y)) = \frac{1}{1 + e^{-(ax+by)}}$$

Les dérivées partielles sont

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma(f(x,y))}{\partial x} = \frac{ae^{-ax-by}}{(1+e^{-ax-by})^2} \\ \frac{\partial \sigma(f(x,y))}{\partial y} = \frac{be^{-ax-by}}{(1+e^{-ax-by})^2} \end{cases}$$

Et donc la norme du gradient est

$$\begin{aligned} \|\nabla\sigma \circ f\| &= \sqrt{\left(\frac{ae^{-ax-by}}{(1 + e^{-ax-by})^2}\right)^2 \left(\frac{be^{-ax-by}}{(1 + e^{-ax-by})^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{(1 + e^{-ax-by})^2}\sqrt{a2e^{-2ax-2by} + b^2e^{-a2x-b2y}} \\ &= \frac{e^{-ax-by}}{(1 + e^{-ax-by})^2}\sqrt{a2 + b^2} \end{aligned}$$

1.3 Exercices Types (exam)

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Donner les dérivées partielles de la composée $f(g)$.

La fonction $f \circ g$ est une fonction de $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}$ et admet donc deux dérivées partielles. Pour rappel de la définition de la dérivée partielle :

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x + h, y)) - f(g(x, y))}{h}$$

On utilise alors la même astuce que pour la dérivée d'une composée :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x + h, y)) - f(g(x, y))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x + h, y)) - f(g(x, y))}{g(x + h, y) - g(x, y)} \frac{g(x + h, y) - g(x, y)}{h} = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

Et donc

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x}(x, y) = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\Delta(f \circ g)(x) = f''(g(x))\|\nabla g(x)\|^2 + f'(g(x))\Delta g(x)$$

Pour résoudre cette question, nous allons procéder étape par étape. Commençons par la dérivée d'une fonction composée à une variable :

$$(f \circ g)' = \lim \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{h} = \lim \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{g(x + h) - g(x)} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f'(g(x))g'(x)$$

On applique ce résultat aux dérivées partielles d'ordre 1

$$\frac{\partial f(g(x, y))}{x} = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(g(x, y))}{y} = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

Pour passer à l'ordre 2, dérivons $f'(g(x, y))$

$$\frac{\partial f'(g(x, y))}{x} = f''(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f'(g(x, y))}{y} = f''(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

On applique la formule de la dérivée d'un produit de fonction $(uv)' = u'v + v'u$. On obtient

$$\frac{\partial^2 f(g(x,y))}{x^2} = f''(g(x,y))\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2 + f'(g(x,y))\frac{\partial^2 g}{x^2}$$

De même pour y. En combinant le résultat pour x et le résultat pour y on trouve bien la formule souhaitée.

3. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}$.

Commençons par écrire la dérivée partielle en xy :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\right)\\ &= \lim_{i\to 0}\frac{\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y+i)-f(x,y+i)}{h}\right)-\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\right)}{i}\\ &= \lim_{i\to 0}\frac{\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y+i)-f(x,y+i)-f(x+h,y)+f(x,y)}{h}\right)}{i}\end{aligned}$$

Écrivons maintenant la dérivée partielle en yx :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial yx} &= \frac{\partial}{\partial yx}\left(\lim_{i\to 0}\frac{f(x,y+i)-f(x,y)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y+i)-f(x+h,y)}{h}\right)-\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+i)-f(x,y)}{h}\right)}{i}\\ &= \lim_{i\to 0}\frac{\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y+i)-f(x,y+i)-f(x+h,y)+f(x,y)}{h}\right)}{i}\end{aligned}$$

On a bien égalité entre $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial yx}$.

2 Intégration

2.1 Mise en Confiance

1. Que vaut $\int_a^a f(x)dx$?

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. Réécrire $\int_a^b f(x)+g(x)dx$ en deux intégrales.

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

3. Que vaut $\int_a^b cdx$ où c est un nombre.

$$\int_a^b cdx = (b-a)c$$

4. Soit f une fonction de primitive F, que vaut $\int_a^b f(x)dx$ en fonction de F

$$F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

5. Réécrire $\int_a^b cf(x)dx$.

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

6. Que vaut $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$?

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

7. Exprimer $\int_a^b f(x)dx$ en fonction de $\int_b^a f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

8. Donner les primitives (une primitive suffit) des fonctions suivantes

1. $x \mapsto x^2$
2. $x \mapsto \frac{1}{x}$
3. $x \mapsto \sqrt{x}$
4. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$
5. $x \mapsto x^n$
6. $x \mapsto |x|$
7. $x \mapsto x^{0.1686499}$

Les primitives sont :

1. $x \mapsto \frac{x^3}{3}$
2. $x \mapsto \ln(x)$
3. $x \mapsto \frac{2x^{3/2}}{3}$
4. $x \mapsto 2\sqrt{x}$
5. $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
6. $x \mapsto \frac{x^2}{2}\frac{|x|}{x}$ (la partie $\frac{|x|}{x}$ correspond au signe de x, c'est-à-dire 1 quand $x > 0$ et -1 quand $x < 0$)
7. $x \mapsto \frac{x^{1.1686499}}{1.1686499}$

9. Soit f une fonction et F sa primitive écrire en fonction de F : $\int_a^b \int_c^y f(x)dxdy$.

$$\int_a^b \int_c^y f(x)dxdy = \int_a^b F(y) - F(c)dy$$

2.2 Exercices Calculatoires

1. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2y - e^{x+y}$. Calculer il y avait une erreur dans l'énoncé !

1. $\int_0^1 f(x, y)dx$
2. $\int_0^1 f(x, y)dy$
3. $\int_0^1 \int_{-1}^1 f(x, y)dxdy$
4. $\int_{-1}^1 \int_0^1 f(x, y)dydx$
5. $\int_0^1 \int_{-1}^1 f(x, y)dydx$
6. $\int_2^\pi \int_2^s f(x, y)dxds$

Les résultats sont :

1. $\int_0^1 x^2y - e^{x+y}dx = -(-1 + e)e^y + y/3$
2. $\int_0^1 x^2y - e^{x+y}dy = -(-1 + e)e^x + x^2/2$
3. $\int_0^1 \int_{-1}^1 x^2y - e^{x+y}dxdy = 4/3 - 1/e + e - e^2$
4. $\int_{-1}^1 \int_0^1 x^2y - e^{x+y}dydx = 4/3 - 1/e + e - e^2$
5. $\int_0^1 \int_{-1}^1 x^2y - e^{x+y}dydx = -\frac{(-1+e)^2(1+e)}{e}$
6. $\int_2^\pi \int_2^s x^2y - e^{x+y}dxds = -e^{\pi+y} + e^{2+y}(-1 + \pi) + 1/12(48 - 32\pi + \pi^4)y$

2. Calculer $\int_0^T\int_0^t \frac{s^2}{m}dsdt$. Soit F tel que $F(T)=\int_0^T\int_0^t \frac{s^2}{m}dsdt+F(0)$, que vaut $F(T)$

$$\int_0^T\int_0^t \frac{s^2}{m}dsdt=\int_0^T \frac{t^3}{3m}dt=\frac{T^4}{12m}$$

et

$$F(T)=\frac{T^4}{12m}+F(0)$$

3. Calculer $\int_0^T\int_0^t 0dsdt$. Soit F tel que $F(T)=\int_0^T\int_0^t \frac{s^2}{m}dsdt+F(0)$, que vaut $F(T)$

$$\int_0^T\int_0^t 0dsdt=0$$

et $F(T)=F(0)$.

4. Calculer $\int_0^T\int_0^t gdsdt$. Soit F tel que $F(T)=\int_0^T\int_0^t \frac{s^2}{m}dsdt+F(0)$, que vaut $F(T)$

$$\int_0^T\int_0^t gdsdt=\int_0^T gtdt=\frac{t^2}{2}g$$

et $F(T)=\frac{t^2}{2}g+F(0)$.

5. Soit le chemin $\gamma:[0;1]\to(1,\sqrt{t})$. Calculer sa longueur.

La formule de la longueur d'un chemin γ est

$$l=\int_0^1 \|\gamma'(t)\|dt$$

Calculons les dérivées partielles de γ :

$$\begin{cases}\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}=\frac{\partial 1}{\partial t}=0\\ \frac{\partial\gamma_2}{\partial t}=\frac{\partial\sqrt{t}}{\partial t}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\end{cases}$$

La norme de la différentielle est donc

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

et donc

$$l=\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=1$$

2.3 Exercices Types (exam)

1. Exprimer $\int_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ en fonction de $\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx$. il y avait une erreur dans l'énoncé.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy&=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}e^{-(x^2+y^2)}dxdy\\ &\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy\\ &\int_{\mathbb{R}}e^{-y^2}\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dxdy\\ &\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx\int_{\mathbb{R}}e^{-y^2}dy\\ &\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx\\ &\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx\right)^2\end{aligned}$$

2. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}_+}e^{r^2}rdrd\theta$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} e^{r^2} r dr d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{e^{r^2}}{2}\right]_0^{\infty} d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}(0-1)d\theta \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi} 1 d\theta \\
&- 2\pi
\end{aligned}$$