Dans cette annale, vous trouverez deux exercices difficiles similaires à ceux présent à l'examen.

Exercice 1

Le but de cet exercice est de prouver que l'ensemble des matrices inversibles est dense. Pour cela, on va prouver que pour chaque matrice non-inversible il existe une autre matrice inversible aussi proche que l'on veut de la première. Pour cela nous allons définir une distance sur l'espace des matrices carrée de taille $n \times n$.

$$d(M_1, M_2) = \max_{i,j}\{(|M_1 - M_2|)_{i,j}\}$$

Ce qui correspond, en français, à l'écart maximal entre M_1 et M_2. Pour rappel une distance est une application telle que $d(M_1, M_2) = d(M_2, M_1)$, $d(M_1, M_2) = 0$ si et seulement si $M_1 = M_2$ et $d(M_1, M_3) \leq d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3)$.

1. vérifier que d est une distance

Vérifions les trois propriétés. Dans l'ordre de l'énonce, soient M_1 et M_2 deux matrices quelconques de taille $n \times n$. Alors

$$d(M_1, M_2) = \max_{i,j}\{(|M_1 - M_2|)_{i,j}\} = \max_{i,j}\{(|M_2 - M_1|)_{i,j}\} = d(M_2, M_1)$$

On a donc vérifié la première propriété. Ensuite,

$$d(M_1, M_2) = 0 \Leftrightarrow \max_{i,j}\{(|M_1 - M_2|)_{i,j}\} = 0 \Leftrightarrow \forall i, j \quad (|M_1 - M_2|)_{i,j} = 0 \Leftrightarrow M_1 = M_2$$

Et enfin,

$$\begin{aligned} d(M_1, M_3) &= \max_{i,j}\{(|M_1 - M_3|)_{i,j}\} \leq \max_{i,j}\{(|M_1 - M_2| + |M_2 - M_3|)_{i,j}\} \\ &\leq \max_{i,j}\{(|M_1 - M_2|)_{i,j}\} + \max_{i,j}\{(|M_2 - M_3|)_{i,j}\} = d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3) \end{aligned}$$

d est donc bien une distance.

2. Soit la suite $M_k = M + \frac{1}{n}\mathbf{Id}$, montrer que la suite M_k converge vers M

Il suffit de montrer que

$$\lim_{n \to \infty} d(M, M_k) = 0$$

En effet,

$$\begin{aligned} d(M, M_k) &= \max_{i,j}\{(|M - M_k|)_{i,j}\} \\ &= \max_{i,j}\{(|M - M - \frac{1}{n}\mathrm{Id}|)_{i,j}\} \\ &= \max_{i,j}\{(|\frac{1}{n}\mathrm{Id}|)_{i,j}\} \\ &= \frac{1}{n} \to_{n \to \infty} 0 \end{aligned}$$

3. Rappeler le critère d'inversibilité d'une matrice par rapport au déterminant.

Une matrice est inversible si et seulement si

$$\det(A) \neq 0$$

La définition générale du déterminant d'une matrice A est récursive : si A est de taille 1 alors $\det(A) = A_{1,1}$ et sinon

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} A_{1,j} \det(A_{[1,j]})$$

où $A_{[1,j]}$ désigne la matrice A privée de la première ligne et j^{th} colonne. Cette matrice est donc de taille $(n-1) \times (n-1)$.

4. Montrer que la fonction $x \mapsto \det(M - x\mathbf{Id})$ est un polynôme de degré n en x

Là on va devoir s'accrocher un petit coup... Nous allons remplacer A dans la définition du déterminant par $M - x\mathrm{Id}$, on obtient alors

$$\det(M - x\mathrm{Id}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} (M - x\mathrm{Id})_{1,j} \det((M - x\mathrm{Id})_{[1,j]})$$

Or le terme $(M - x\mathrm{Id})_{1,j}$ est un polynôme de degré au plus 1 en x. En effet, il s'agit d'une coordonnée de la matrice $M - x\mathrm{Id}$, donc c'est un terme qui contient au plus x et ne contient pas de termes en x^m pour $m \geq 2$. Ainsi le déterminant est un polynôme de degré :

$$\text{degré}(\det(\text{matrice de taille } n \times n)) = \text{degré}(\det(\text{matrice de taille } (n-1) \times (n-1))) + 1$$

Ainsi, on en déduite que le déterminant d'une matrice $M - x\mathrm{Id}$ est un polynôme de degré au plus n en x.

5. Montrer qu'une infinité de terme de la suite M_k sont inversibles

Puisque de le déterminant de M_k est un polynôme de degré n, il admet au plus n racines et donc ne s'annule qu'au plus n fois. Donc il y a au plus n termes de déterminant nul dans la suite M_k. En conséquence il y a une infinité de termes inversibles

6. Conclure

En recoupant les résultats précédents, il existe une suite dans la suite M_k de matrices inversibles qui convergent vers M ce qui conclut l'exercice.

Exercice 2

Nous allons démontrer la loi faible des grands nombres : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi admettant une espérance μ et de variance σ^2. Alors

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) = 0$$

Nous allons commencer par montrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\epsilon^2}$$

Rappel : la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{x\in A}$ vaut 1 si la condition $x \in A$ est vérifiée et vaut 0 sinon.

1. Montrer que $\mathbb{E}[\epsilon^2 \mathbb{1}_{|X-\mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2}] \leq \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2]$.

On va simplement montrer que $\epsilon^2 \mathbb{1}_{|X-\mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2}$ est plus petit que $|X - \mathbb{E}[X]|^2$. En effet, $\epsilon^2 \mathbb{1}_{|X-\mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2}$ vaut ϵ^2 lorsque $|X - \mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2$ et 0 sinon. On a donc

$$\begin{cases} \text{si } |X - \mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2 & \epsilon^2 \mathbb{1}_{|X-\mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2} = \epsilon^2 \leq |X - \mathbb{E}[X]|^2 \\ \text{sinon} & \epsilon^2 \mathbb{1}_{|X-\mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2} = 0 \leq |X - \mathbb{E}[X]|^2 \end{cases}$$

et donc on a bien $\epsilon^2 \mathbb{1}_{|X-\mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2} \leq |X - \mathbb{E}[X]|^2$, par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}[\epsilon^2 \mathbb{1}_{|X-\mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2}] \leq \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2]$$

2. Montrer que $\epsilon^2 \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2) \leq \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2]$ en utilisant le fait que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

On reprend l'inégalité précédente,

$$\mathbb{E}[\epsilon^2 \mathbb{1}_{|X-\mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2}] \leq \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2]$$

On sort la constante dans l'espérance de gauche

$$\epsilon^2 \mathbb{E}[\mathbb{1}_{|X-\mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2}] \leq \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2]$$

Puis on applique l'astuce de l'énoncé

$$\epsilon^2 \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2) \leq \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2]$$

3. En déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Pour déduire l'inégalité cherchée, on commence par utilisé : $\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2] = \mathbb{V}[X]$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\epsilon^2}$$

Ensuite, on utilise le fait $|X - \mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2$ si et seulement si $|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon$ et donc $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]|^2 \geq \epsilon^2) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\epsilon^2}$$

4. Donner l'espérance et la variance de $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.

Commençons par l'espérance,

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[X_1+\cdots+X_n\right] = \frac{1}{n}\sum_i^n \mathbb{E}\left[X\right] = \mu$$

Puis la variance,

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[(X_1+\cdots+X_n)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_i^n\sum_j^n \mathbb{E}\left[X_iX_j\right] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu$$

On en déduit

$$\mathbb{V}\left[\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\right] = \frac{\sigma^2}{n}$$

5. Conclure

On utilise les valeurs précédentes dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebytechev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \mathbb{E}\left[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right]\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}\left[\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\right]}{\epsilon^2}$$

On obtient

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$$