1 Fonctions de plusieurs variables

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Une telle fonction est une **fonction de plusieurs variables** qui transforme des vecteurs de n coordonnées en vecteurs de m coordonnées. Ces vecteurs sont notés de façon verticale comme suit

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

où chacune des fonctions f_i est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. De telles fonctions permettent de mieux représenter des problèmes réels que les fonctions scalaires. Par exemple, la position d'un objet en fonction du temps peut être vu comme une fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (pour un espace à trois dimensions).

2 Gradient

A l'instar des fonctions scalaires, il est possible de définir la dérivation dans le cas des fonctions de plusieurs variables. Rappelons la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f' : x \mapsto \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

Au lycée, la dérivée est souvent présentée comme *le coefficient directeur de la tangente*. En réalité il s'agit de la direction de la plus forte pente. Cette présentation est particulièrement visible dans le cas des fonctions de plusieurs variables. Afin de définir formellement le gradient, nous devons introduire la notion de **dérivée partielle**. En effet, dans le cas d'une fonction de plusieurs variable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m=1}$, la valeur de f évaluée en x (un vecteur à n coordonnées) est un scalaire ($m = 1$). Cette valeur varie en fonction de x_1 mais également de x_2,... En conséquences, la dérivée partielle de f selon la variable x_i est définie comme suit

$$\frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)}{h} \tag{3}$$

En pratique, la dérivée partielle par rapport à x_i se calcule de la façon suivante : les autres variables sont dérivées comme s'il s'agissait de constante tandis que x_i est dérivée comme étant la variable. Le gradient de f est alors définit comme suit

$$\nabla f(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Pour généraliser à des valeurs quelconque de m, il suffit de calculer les gradients de chaque $f_1, ..., f_m$ et des concaténer comme suit

$$\nabla f(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1,...,x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1,...,x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x_1,...,x_n)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m(x_1,...,x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Note : Le gradient, à l'instar de la dérivée, est une fonction (ou encore un opérateur) qui agit sur des fonctions et les transforment en fonction. L'opération de dériver f donne f' et de façon similaire l'opération gradient sur f donne ∇f qui est, au même titre que f, une fonction. Le gradient de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est toujours une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{m\times n}$.

3 Illustration par un exemple

Nous allons illustrer les calculs et cette notion de "pente la plus forte" avec la fonction suivante : $f : (x, y) \mapsto \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Nous avons une fonction de $\mathbb{R}^2$, car de deux variables x et y, dans $\mathbb{R}$ car dont l'image est un scalaire

$\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Nous avons donc 2×1 dérivées partielles à calculer.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\partial x} = \frac{x\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\partial y} = \frac{y\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned} \tag{6}$$

Calculons la valeur du gradient de f évalué en $x = 3, y = 3$: $\nabla f(3,3) = (\cos(3\sqrt{2})/\sqrt{2}, \cos(3\sqrt{2})/\sqrt{2}) \approx (-0.320, -0.320)$. Si on trace la direction de ce vecteur sur le graphe de f, on constate qu'il donne bien la direction de la plus forte pente (voir Figure 1).

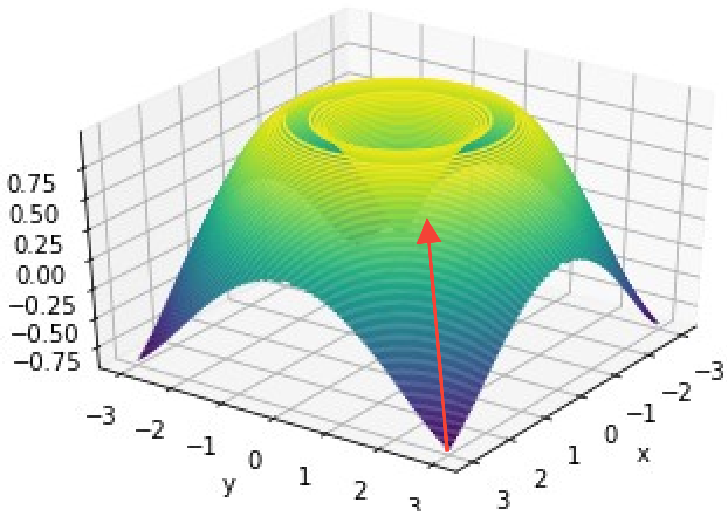

FIGURE 1 – Graphe de la fonction $f : (x, y) \mapsto \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ avec le vecteur du gradient de f évalué en $(3,3)$