Exercice 1 : prédire le loyer

On souhaite prédire le loyer y d'un appartement à partir de quelques informations $(x_1, ...)$ sur cet appartement. On dispose, pour chaque appartement, de sa surface au sol, de sa hauteur sous plafond et de sa distance au métro le plus proche.

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction qui pour chaque appartement prédit son loyer. Que valent n et m ?
2. À partir de maintenant f est un réseau de neurone tel que $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ avec $f_1 : x \mapsto W_1 x$, $f_3 : x \mapsto W_2 x$ et $f_2 : x \mapsto \mathbb{1}_{x>0}$. On sait que $W_1 \in \mathbb{R}^{4\times 3}$. On note $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_1}$, $f_2 : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{n_3}$ et $f_3 : \mathbb{R}^{n_4} \to \mathbb{R}^m$. Que valent n_1, n_2, n_3 et n_4 ?
3. Calculer la Jacobienne de f_1
4. Calculer la Jacobienne de f_2
5. Calculer la Jacobienne de f_3
6. Calculer la Jacobienne de f
7. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue par descente de gradient est stationnaire. Autrement dit, la suite $x_n = x_{n-1} - a \times J_f(x_{n-1})$ est constante. Donc, on doit montrer que $x_n = x_{n-1}$.

Exercice 2 : Analyse du texte

On représente un texte comme une suite de vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ ou chaque vecteur représente un mot. Notre modèle f va prédire le mot suivant, étant donné un contexte de k mots.

1. En notant x le tenseur dont les lignes sont les mots du contexte, quelles sont les dimensions de x.
Par exemple, une mauvaise réponse serait : x est un vecteur avec 4 coordonnées.
2. Donner l'expression de f.
3. La fonction f admet combien de dérivées partielles ?

La fonction f admet $(k \times n) \times n = kn^2$ dérivées partielles.

Exercice 3 : Théorie de l'apprentissage

Soit f une fonction convexe. On dit que f est coercive si et seulement si

$$\lim_{x\to+\inf} f(x) = \lim_{x\to-\inf} f(x) = +\inf$$

Pour la suite de l'exercice, on considère f strictement convexe, coercive et dérivable, de dérivée continue.

1. Montrer que si x est un minimum local, alors $f'(x) = 0$.
2. Montrer que pour f (sous les hypothèses du début de l'exercice), il existe x tel que $f'(x) > 0$.
indication : utiliser $\int_0^b f'(x)dx = f(b) - f(0)$
3. Montrer que pour f (sous les hypothèses du début de l'exercice), il existe x tel que $f'(x) < 0$.
4. Montrer que la stricte convexité de f garantie qu'elle n'est jamais croissante puis décroissante puis croissante.
5. Montrer que la stricte convexité de f garantie qu'elle n'est jamais décroissante puis croissante puis décroissante.
6. Montrer que f est décroissante puis croissante.
7. Montrer que f admet un minimum global.
8. Donner un exemple pour f.